エバルト－ラウエ理論と高木－トウパンの式の相互関係 1/7

'92.12.2

加藤流 高木－トウパンの式

$$\frac{\partial D_0}{\partial s_0} = -i\pi K C \chi_{-h} \exp(-2\pi i \, h \cdot u) D_h \quad \text{—— ①}$$

$$\frac{\partial D_h}{\partial s_h} = -i\pi K C \chi_{+h} \exp(+2\pi i \, h \cdot u) D_0 \quad \text{—— ②}$$

エバルト－ラウエ流 動力学理論

$$\xi_0 \xi_h = \frac{1}{4} K^2 C^2 \chi_{+h} \chi_{-h} \quad \text{—— ③}$$

分散面の方程式

$$\frac{D_h}{D_0} = \frac{2\xi_0}{K C \chi_{-h}} \quad \text{—— (4.a)}$$

D_0とD_hの振幅の関係式

$$= \frac{K C \chi_{+h}}{2\xi_h} \quad \text{—— (4.b)}$$

{①, ②} ⟶ {③, ④}, {③, ④} ⟶ {①, ②}

が導くことができればよい。

以下 次頁。

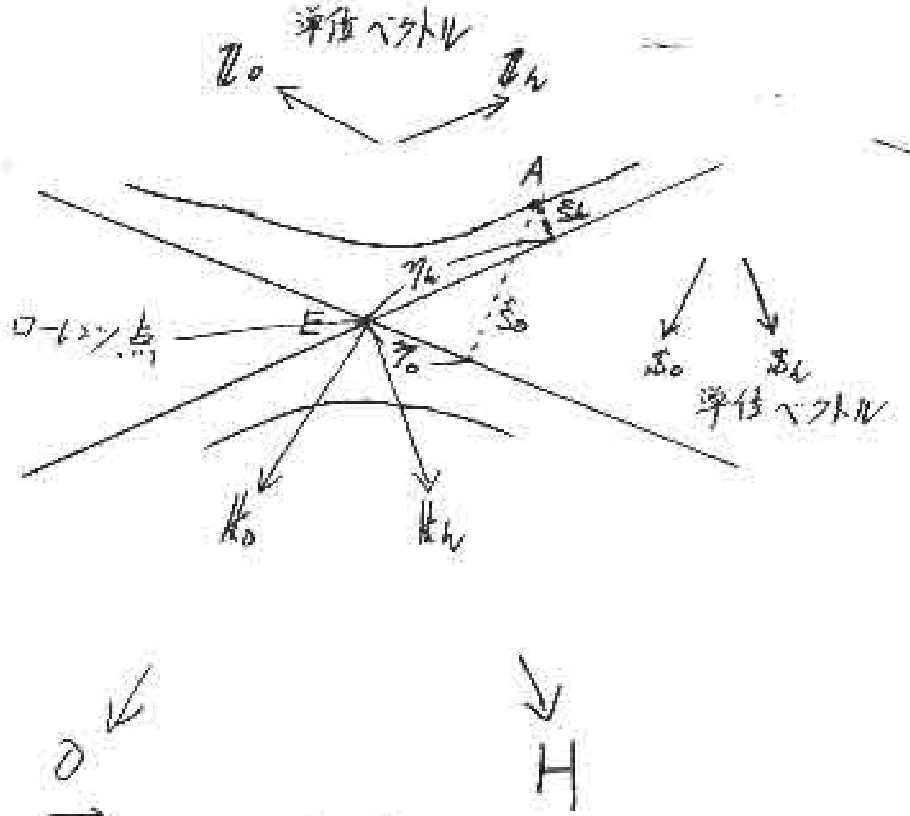

図1

$\mathbf{k}_0 = \overrightarrow{EO}$，$\mathbf{k}_h = \overrightarrow{EH}$，Eはローレンツ点

無次限の単位ベクトル $\mathbf{v}_0$，$\mathbf{v}_h$ および $\mathbf{s}_0$，$\mathbf{s}_h$ を上の図のように定義する。

Eをローレンツ点、Aを励起点として、$\overrightarrow{AE} = \Delta\mathbf{k}$ とすると

$$\Delta\mathbf{k} = \xi_0 \mathbf{s}_0 + \eta_0 \mathbf{v}_0 \qquad (5)$$

$$= \xi_h \mathbf{s}_h + \eta_h \mathbf{v}_h \qquad (6)$$

実空間のベクトル $\mathbf{r}$ は次のように表わすとする

$$\mathbf{r} = S_0 \mathbf{s}_0 + S_h \mathbf{s}_h \qquad (7)$$

逆空間の分散面上での$\overbrace{\text{複素振幅}}^{\text{透過および反射波の}}$の分布を、

$D_0^k(\xi_0, \xi_h)$，$D_h^k(\xi_0, \xi_h)$，

実空間の透過波および反射波の複素振幅を

$D_0^r(S_0, S_h)$，$D_h^r(S_0, S_h)$

とする。

ここで $\overbrace{\text{実空間の波動}}^{D}$ は次のように記述されるとする.

$$D = D_0^r(S_0,S_h)\exp(-2\pi i\,\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}) + D_h^r(S_0,S_h)\exp(-2\pi i\,\mathbf{k}_h\cdot\mathbf{r})$$

ここで $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_h$ は、図1に示したとおり.

エバルトラウエ → 高木トウパン

証明.

$D_0^r(S_0,S_h)$ は、$D_0^k(\xi_0,\xi_h)$ を用いて次のように表される.

$$D_0^r(S_0,S_h) = \int_{\xi_0,\xi_h}^{d.S} D_0^k(\xi_0,\xi_h)\exp(-2\pi i\,\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,d\xi_0\,d\xi_h \quad \text{—⑧}$$

ここで⑤式、⑥式および⑦式の関係を上式に代入して、

$$D_0^r(S_0,S_h) = \int_{\xi_0,\xi_h}^{d.S} D_0^k(\xi_0,\xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_0 S_0 + \xi_h S_h)\}\,d\xi_0\,d\xi_h \quad \text{—⑨}$$

⑧、及び⑨式で $\int_{\xi_0,\xi_h}^{d.S} d\xi_0\,d\xi_h$ は分散面に沿った積分を表わす.

上と同様にして、$D_h^r(S_0,S_h)$ は $D_h^k(\xi_0,\xi_h)$ を用いて次のように表わされる

$$D_h^r(S_0,S_h) = \int_{\xi_0,\xi_h}^{d.S} D_h^k(\xi_0,\xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_0 S_0 + \xi_h\cdot S_h)\}\,d\xi_0\,d\xi_h \quad \text{—⑩}$$

前頁⑨式を再掲する.

$$D_o^r(S_o, S_h) = \int_{\xi_o, \xi_h}^{d.s.} D_o^k(\xi_o, \xi_h) \exp\left\{-2\pi i(\xi_o S_o + \xi_h S_h)\right\} d\xi_o d\xi_h \qquad ⑨$$

(再掲)

上式をS_oで微分すると.

$$\frac{\partial D_o^r(S_o, S_h)}{\partial S_o} = -2\pi i \xi_o \int_{\xi_o, \xi_h}^{d.s} D_o^k(\xi_o, \xi_h) \exp\left\{-2\pi i(\xi_o S_o + \xi_h S_h)\right\} d\xi_o d\xi_h \qquad ⑪$$

⑨式に④-⑥式(D_oとD_hの関係式)を代入して.

$$D_o^r(S_o, S_h) = \frac{2\xi_h}{KC\chi_{th}} \int_{\xi_o, \xi_h}^{d.S.} D_h^k(\xi_o, \xi_h) \exp\left\{-2\pi i(\xi_o S_o + \xi_h S_h)\right\} d\xi_o d\xi_h \qquad ⑫$$

前頁⑩式を再掲する.

$$D_h^r(S_o, S_h) = \int_{\xi_o, \xi_h}^{d.S} D_h^k(\xi_o, \xi_h) \exp\left\{-2\pi i(\xi_o S_o + \xi_h S_h)\right\} d\xi_o d\xi_h \qquad ⑩$$

(再掲)

上式をS_hで微分すると,

$$\frac{\partial D_h^r(S_o, S_h)}{\partial S_h} = -2\pi i \xi_h \int_{\xi_o, \xi_h}^{d.S.} D_h^k(\xi_o, \xi_h) \exp\left\{-2\pi i(\xi_o S_o + \xi_h S_h)\right\} d\xi_o d\xi_h \qquad ⑬$$

⑩式に④-⑥式(D_oとD_hの関係式)を代入して,

$$D_h^r(S_o, S_h) = \frac{2\xi_o}{KC\chi_{-h}} \int_{\xi_o, \xi_h}^{d.S} D_o^k(\xi_o, \xi_h) \exp\left\{-2\pi i(\xi_o S_o + \xi_h S_h)\right\} d\xi_o d\xi_h \qquad ⑭$$

左頁の⑪式と⑭式を辺々比較すると、

$$\frac{\partial D_0^k(S_0, S_h)}{\partial S_0} = -i\pi K C \chi_h D_h^k(S_0, S_h) \qquad (15)$$

左頁の⑫式と⑬式を辺々比較すると、

$$\frac{\partial D_h^k(S_0, S_h)}{\partial S_h} = -i\pi K C \chi_{\bar{h}} D_0^k(S_0, S_h) \qquad (16)$$

上の⑮,⑯式は 高木-トウパンの式①,②から歪みの項をとりはらった表式に外ならない

—— 以上 エバルト-ラウエ → 高木-トウパン 証明終 ——

以下 高木-トウパン → エバルト-ラウエ の証明

図7のように $\mathbf{k}_0$ と $\mathbf{k}_h$ を定義し、更に、$\mathbf{k}_0'$ と $\mathbf{k}_h'$ を、

$$\mathbf{k}_0' = \mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k} \qquad (17)$$

$$\mathbf{k}_h' = \mathbf{k}_h + \Delta\mathbf{k} \qquad (18)$$

とおく。上記のような波数ベクトルをもった下記のような波動場があったとする。

$$D^k(\xi_0, \xi_h) = D_0^k(\xi_0, \xi_h)\exp(-2\pi i \mathbf{k}_0' \cdot \mathbf{r}) + D_h^k(\xi_0, \xi_h)\exp(-2\pi i \mathbf{k}_h' \cdot \mathbf{r}) \qquad (19)$$

$$= D_0^k(\xi_0, \xi_h)\exp(-2\pi i \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\exp(-2\pi i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + D_h^k(\xi_0, \xi_h)\exp(-2\pi i \Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\exp(-2\pi i \mathbf{k}_h \cdot \mathbf{r}) \qquad (20)$$

$$= D_0^k(\xi_0, \xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_0 S_0 + \xi_h S_h)\}\exp(-2\pi i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + D_h^k(\xi_0, \xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_0 S_0 + \xi_h S_h)\}\exp(-2\pi i \mathbf{k}_h \cdot \mathbf{r}) \qquad (21)$$

高木・トーパンの式⑮,⑯は 波動場 $D^r(s_o, s_h)$ が次のような表式で表わされることを前提としている。

$$D^r(s_o, s_h) = D_o^r(s_o, s_h)\exp(-2\pi i\,\boldsymbol{k}_o\cdot\boldsymbol{r}) + D_h^r(s_o, s_h)\exp(-2\pi i\,\boldsymbol{k}_h\cdot\boldsymbol{r}) \qquad (22)$$

㉑式と㉒式の比較により、

$$D_o^r(s_o, s_h) = D_o^k(\xi_o, \xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_o s_o + \xi_h s_h)\} \qquad (23)$$

$$D_h^r(s_o, s_h) = D_h^k(\xi_o, \xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_o s_o + \xi_h s_h)\} \qquad (24)$$

㉓,㉔式を⑮,⑯式に代入して、分散面の方程式③と、$D_o(\xi_o,\xi_h)$ と $D_h(\xi_o,\xi_h)$ の間の関係式(4.a)と(4.b)を導けばよい。

㉓,㉔式を⑮式に代入して次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial s_o}\left\{D_o^k(\xi_o, \xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_o s_o + \xi_h s_h)\}\right\} = -i\pi K C \chi_{-h}\left\{D_h^k(\xi_o, \xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_o s_o + \xi_h s_h)\}\right\} \qquad (25)$$

よって、

$$-2\pi i\,\xi_o\, D_o^k(\xi_o, \xi_h) = -i\pi K C \chi_{-h}\, D_h^k(\xi_o, \xi_h) \qquad (26)$$

同様に ㉓,㉔式を⑯式に代入して、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial s_h}\left\{D_h^k(\xi_0, \xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_0 s_0 + \xi_h s_h)\}\right\}$$
$$= -i\pi K C \chi_{+h}\left\{D_0^k(\xi_0, \xi_h)\exp\{-2\pi i(\xi_0 s_0 + \xi_h s_h)\}\right\} \quad \text{———— (27)}$$

$$-2\pi i\, \xi_h\, D_h^k(\xi_0, \xi_h) = -i\pi K C \chi_{+h} D_0^k(\xi_0, \xi_h) \quad \text{———— (28)}$$

㉖と、㉘が D_0 と D_h についてゼロでない解を持つための条件として次式を得る。

$$\frac{D_0^k}{D_h^k} = \frac{\cancel{-i\pi}KC\chi_{-h}}{\cancel{-2\pi i}\,\xi_0} = \frac{\cancel{-2\pi i}\,\xi_h}{\cancel{-i\pi}KC\chi_{+h}} \quad \text{———— (29)}$$

$$\therefore\ \xi_0\,\xi_h = \frac{1}{4}K^2C^2\chi_{+h}\chi_{-h} \quad \text{———— (30)}$$

上式は分散面の方程式にほかならない。

㉙式を分母分子、入れかえますと、

$$\frac{D_h^k(\xi_0, \xi_h)}{D_0^k(\xi_0, \xi_h)} = \frac{2\xi_0}{KC\chi_{-h}} \quad \text{———— (31)}$$

$$= \frac{KC\chi_{+h}}{2\xi_h} \quad \text{———— (32)}$$

㉛,㉜式は、それぞれ (4.a) 及び (4.b) 式に等しい。

以上 高木−トゥパン ⟶ エバルト−ラウエ の証明 終